**Die Polare**

Die Polare ist die ***Abbildung eines Punkte P*** (zunächst einmal ausserhalb eines gegebenen Kreises) ***auf eine Gerade g***[[1]](#footnote-2), ***die diesen Kreis so schneidet, dass die Schnittpunkte die Berührpunkte der beiden von P0 an den Kreis gezogene Tangenten sind !*** ( Abbildung unten)



**Die Gleichung der POLAREN zum Pol P0:**

O.B.d.A. legen wie den Kreismittelpunkt in den Ursprung (Verschiebung des Koordinatensystems um den Vektor -**x**M) !

Die Polarengleichung beschreiben wir in der Normalenform

**n** (**x** – xg) = 0

(Skalarprodukt ist Null beim Senkrecht-stehen)

wobei **n** Normalenvektor, nämlich der Ortsvektor zum Pol **P0** ist und xg ein beliebiger Punkt der zu beschreibenden Geraden ist!

Die Hesseform der Polaren ist

  **. n**0 **x** = d**.**

wobei **n**0 der Einheitsnormalenvektor ist, den man durch die Teilung von **n** durch die Länge von n = | **n** | = | **P0** | erhält,

 und d = **n**0**x**g der Abstand der Geraden zum Ursprung ist.

Nun ist der senkrecht auf der Polaren stehende **Normalenvektor n =** **x**P0 der von der Kreismitte

zum Pol (xp0; yp0) verlaufende Ortsvektor.

Da seine Länge |**x**P| =√( x²p0+ y²p0) gerade die Länge des Ortsvektors **x**P ist, der von der Kreismitte bis zum Pol verläuft,

müssen wir dir Normalenform durch diese Länge teilen um den Abstand d der Polaren um Ursprung zu erhalten.

Nun ist aber das Produkt von d mit der Länge |**x**P| nach dem Kathetensatz des Euklid gerade das Quadrat der Kreisradius r²

d mal √( x²p0+ y²p0) = r²

und daher hat man statt der HNF **n**0 **x** = d

**…** ..**x**P0**x** = r²..**…**

oder ausführlicher geschrieben

xp0x + yp0y = r²

 als **Polarengleichung** !

Wenn der Pol **P0** ein Punkt der Kreislinie ist, liegt der Pol auf der Polaren und ist Berührpunkt B(xb; yb)

Die Tangentengleichung durch B(xb; yb) heißt also

xb**x**x + yb y = r²

Berechnen wir nun zu zwei gegebenen Berührpunkten den Pol bzw zu drei Berührpukten die Ecken des Dreiecks.

Hier nütze ich nun die Gelegenheit, die mit Abstand beste Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme vorzustellen: Die Determinantenmethode!

Es ist nämlich ein handfester Skandal, dass Determinanten in der Schule nicht mehr unterrichtet werden. Es gibt nichts besseres, wenn man am sichersten, schnellsten und effektivsten lineare Gleichungssysteme auflösen will !!!

Seien nun B1 (x1; y1) und nun B2  (x2; y2) zwei Berührpunkte am Einheitskreis (sonst die 1 durch r² ersetzen!), dann sind die

Tangentengleichungen

1. x1x + y1y = 1 bzw. r²
2. x2x + y2y = 1 bzw. r²

Die Lösung für x und y sind die Quotien zweier Determinanten:

 Zählerdeterminante Zx bzw. Zy
 durch die Nennerdeteminante N

wobei die Nennerdeterminante N einfach diejenige der Koeffizienten der Variablen ist

 N .= ¦ x1 y1 ¦
 ¦ x2  y2 ¦

 **= x1 y2 - y1 x2**

(über s Kreuz multipizieren und Produkte subtrahieren)

Wenn diese Nennerdeteminante nicht verschwindet, gibt es immer genau eine eindeutige Lösung!

Für die Zählerdetemimnate ersetzt man die Variablenspalte durch die Spalte der absoluten Glieder, die auf der anderen Seite des Gleichheitszeichnes stehen, was hier eine Einserspalte ist:

 ZX = ¦ 1 y1 ¦
 ¦ 1 y2 ¦

 **= y2 - y1**

 Zy = ¦ x1 1 ¦
 ¦ x2  1 ¦

 **= x1 - x2**

 x = ( **y2 - y1**  ) /  **N**

 y = ( **x1 - x2** ) /  **N**

 Folgerung:

Sind die Koordinaten der Inkreis-Berührpunkte rational, sind auch die Koordinaten der Ecken rational.

**Beispiel:**

Die Berührpunkte sind (0.8; 0.6) und (0; -1)

**N = ¦ 0,8 0.6 ¦
 ¦ 0 -1 ¦**

 **= - 0 .8 - 0 = -0.8**

x =( **y2 - y1**) / N =  **(** (**-1) - 0.6**) **)** = -1.6/(-0.8) = **2**

y =( **x1 - x2** ) / ( -0.8 ) = ( **0.8 - 0** )/ (-0.8) = -**1**

Der zugehörige Pol ist **(2; -1)**



Den Pol (die Ecken) bekommt man durch die **Kreisspiegelung** derVerbindungsmitte der beiden Berührpunkte!

Am Einheitskreis ist das Produkt der Längen von Gegenstandspunkt und Bildpunkt gerade 1 (allgemein r²), so dass die Entfernung zum Pol gerade der Kehrwert der halben Vektorsumme der Berührpunte (Verbindugsmitte) ist.

Der Summen-Vektor (0.8 ; -0.4) hat die Länge √(.8²+.4²) = √0.8
= √(4/5) = 2√5

Der halbe Summenvektor hat also die Länge √5. Der Kehrwert davon ist 1 / √5 = √5 , und der Pol (2; -1) ist genau √(1²+.2²) = √5 entfernt!

Beweise:

1. Die **Länge des Tangentenabschnitts** t = BiP0 ist gleich dem Produkt der Länge vom Ursprung zu P0 und der halben Entfernung der Berührpunkte B1B2 (= der doppelten Fläche 2A des rechtwinkligen Drachens OP0B1B2!) [[2]](#footnote-3)
2. In komplexer Schreibweise ist der Pol
**P0** = (B1 mal B2) / [½(B1 plus B2)]

Anleitung: Zeige, dass die Länge und der Winkel übereinstimmen[[3]](#footnote-4)

1. in der Dimension 2, analog eine Ebene in Dim 3 … [↑](#footnote-ref-2)
2. In der Abb. ist t=2 und OP0 = √5 und die andere Diagonale hat die Entfernung der Berührpunkte B1B2  | (0.8; 0.6) - (0; -1)| = √3,2= 4/√5 ] [↑](#footnote-ref-3)
3. Komplex berechnet sich der Pol als verdopplete Wehrle-Zahl der beiden Berührpunte; was dasselbe wie Produkt duch die halbe Summe ist:

Das Produkt ist doch das Minus-i –fache von (0.8; 0.6) ist :

	* ( 0.8i – 0.6 ) = 0,6 - 0.8i (Drehung um -9o Grad)

 Produkt durch halbe Summe also

(0,6 -0.8i) /( 0.4-0.2i) =

(0,6 -0.8i) ( 0.4+0.2i) durch Längenquadrat=0.2

0,24 + 0.16 - 0,32i +0.12i durch Längenquadrat=1/5

( 0,4 – 0,2i ) mal 5 = 2 - **i** [↑](#footnote-ref-4)